

ни бажарайлик (45-§). Натижада текисликнинг ҳар бир $M(x, y)$ нуқтаси шундай $M'(X, Y)$ нуқтага ўтадики, улар учун

$$\overrightarrow{PM'} = k \overrightarrow{PM} \quad (19)$$

булади, бунда MM' тўғри чизиқ Ox ўққа перпендикуляр ва $P = MM' \cap Ox$, M, M', P нуқталар бир хил абсциссага эга ва $P \in Ox$ бўлгани учун (19) муносабат координаталарда ушбу кўринишда бўлади:

$$(X - x) \vec{i} + (Y - y) \vec{j} = k [(x - x) \vec{i} + (y - y) \vec{j}]$$

ёки

$$\begin{cases} x = X \\ y = \frac{1}{k} Y \end{cases} \quad (*)$$

Текисликни $k = \frac{b}{a}$ коэффициент билан Ox ўққа қисишда (18) айланага мос келган чизиқнинг тенгламасини топиш учун (*) дан x, y нинг қийматларини (18) га қўямиз:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{k^2 a^2} = 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Бу тенглама ярим ўқлари a, b бўлган эллипсни ифодалайди. → айланани диаметрига қисиш алмаштиришида айлана эллипсга алмашинади.

Тўғри чизиққа қисиш аффин алмаштириш бўлгани учун ҳар қандай эллипсни бирер айлананинг аффин образи деб қараш мумкин. ▲

Мисол. $x^2 + y^2 = 16$ айланани Ox ўққа қисиш натижасида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипс ҳосил бўлган. Қисиш коэффициентини топинг.

Ечиш. Эллипс тенгламасидан: $a = 4, b = 3, k = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$.

49- §. Гипербола

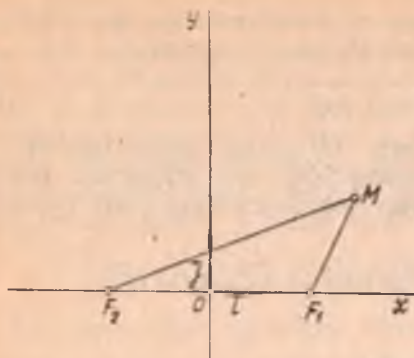
1. Таърифи, каноник тенгламаси. Текисликда ҳар бир нуқтасидан *фокуслар* деб аталувчи берилган икки F_1, F_2 нуқтагача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати берилган кесма узунлигига тенг бўлган барча нуқталар туплами *гипербола* деб аталади.

Гипербола таърифидаги берилган кесма узунлигини $2a (a > 0)$ билан, фокуслари орасидаги масофани $2c (c > 0)$ билан белгилаймиз.

Албатта

$$2a < 2c. \quad (*)^1$$

¹ Учбурчак қоидасига кўра икки томон айирмаси учинчи томондан кичик. Биз $a = 0$ ва $a = c$ дан иборат «айниган» ҳолларни қарамаймиз.



135- чизма

Гиперболадаги M нуқта-нинг F_1, F_2 гача масофалари унинг фокал радиуслари дейилади ва r_1, r_2 билан белгиланади, яъни

$$r_1 = \rho(F_1, M), \quad r_2 = \rho(F_2, M).$$

Гиперболанинг таърифига биноан

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (20)$$

(20) тенглик фақат гиперболада ётган M нуқталар учунгина ўринли. Бу тенгликни координаталарда ёзамиз. Бунинг учун декарт реперини эллипс

билан иш кўрганимиздек қилиб танлаймиз (135-чизма).

Фокуслар орасидаги масофа $\rho(F_1, F_2) = 2c$ бўлгани учун олинган реперга нисбатан $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$. Шу реперга нисбатан гиперболадаги ихтиёрий M нуқтанинг координаталарини x, y билан белгилайлик: $M(x, y)$. У ҳолда

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (21)$$

булиб, (20) ва (21) дан

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$$

ёки

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (22)$$

Гиперболани ифодаловчи (22) тенгламани соддароқ кўринишга келтирайлик. (22) дан:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб, соддалаштирамиз:

$$\pm a \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Бу тенгламани яна квадратга кўтариб, сўнгра соддалаштирсак,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (23)$$

$a^2 < c^2 \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$; бу айирмани b^2 билан белгилаймиз:

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (24)$$

У ҳолда (23) муносабатдан ушбу содда тенгламага келамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (25)$$

Демак, гипербола иккинчи тартибли чизикдир. (25) тенглама гиперболани ифодаловчи (22) тенгламанинг натижаси, шунга кўра коор-

динаталари (22) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир $M(x, y)$ нуқта (25) тенгламани ҳам қаноатлантиради.

Энди бунинг тескарисини исбот қилайлик. $M_1(x_1, y_1)$ (25) нк қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқта бўлсин, яъни

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (26)$$

M_1 нуқтанинг F_1, F_2 фокуслардан масофалари:

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}. \quad (27)$$

(26) тенгликдан $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2)$. Бу қийматни (27) тенгликларга қўйиб, $b^2 = c^2 - a^2$ муносабатни эътиборга олсак,

$$r_1 = \pm \left(\frac{c}{a} x_1 - a \right), \quad (28)$$

$$r_2 = \pm \left(\frac{c}{a} x_1 + a \right) \quad (29)$$

тенгликларга эга бўламиз, r_1, r_2 мусбат сонлар, шунга кўра қавслар олдидаги ишораларни шундай танлаш керакки, (28) ва (29) тенгликларнинг ўнг томонлари ҳам мусбат бўлсин. (26) дан $\Rightarrow |x_1| \geq a$. Бундан ташқари, $c > a \Rightarrow \frac{c}{a} > 1$. У ҳолда, агар $x_1 \geq a$ бўлса, $\frac{c}{a} x_1 - a > 0$ ва $\frac{c}{a} x_1 + a > 0$ бўлиб, (28) ва (29) тенгликлардаги қавсларни $+$ ишора билан оламиз, яъни

$$r_1 = \frac{c}{a} x_1 - a, \quad r_2 = \frac{c}{a} x_1 + a. \quad (30)$$

Булардан $r_1 - r_2 = \frac{c}{a} x_1 - a - \frac{c}{a} x_1 - a = -2a$; $x_1 \leq -a$ бўлса, $\frac{c}{a} x_1 - a < 0$ ва $\frac{c}{a} x_1 + a < 0$ бўлиб, (28), (29) тенгликлардаги қавсларни $-$ ишора билан оламиз, яъни

$$r_1 = a - \frac{c}{a} x_1, \quad r_2 = -a - \frac{c}{a} x_1;$$

булардан

$$r_1 - r_2 = a - \frac{c}{a} x_1 + a + \frac{c}{a} x_1 = 2a. \quad (31)$$

Демак, (25) тенгламадан (22) тенглама келиб чиқади. Шундай қилиб (25) тенглама гиперболаининг тенгламасидир. (25) тенглама гиперболанинг *каноник тенгламаси* дейилади.

(30) ва (31) тенгламалардан қўйидаги натижа келиб чиқади: гиперболадаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтанинг r_1, r_2 фокал радиуслари унинг x абсциссаси орқали

$$x > 0 \text{ бўлганда } r_1 = \frac{c}{a}x - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x + a, \quad (32)$$

$$x < 0 \text{ бўлганда } r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = -a - \frac{c}{a}x \quad (33)$$

куринишларда чизиқли ифодаланади.

Мисол. Гиперболанинг $F_1(10, 0)$, $F_2(-10, 0)$ фокусларини ва нуқталаридан бири $A(12, 3\sqrt{5})$ ни билган ҳолда унинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Бу ерда

$$r_1 = \rho(F_1, A) = \sqrt{4 + 45} = \sqrt{49} = 7,$$

$$r_2 = \rho(F_2, A) = \sqrt{484 + 45} = \sqrt{529} = 23.$$

$$|7 - 23| = 2a \Rightarrow a = 8.$$

Гипербола учун $b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow b = 6$. Демак,

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

2. Гипербола шакли. Гиперболанинг

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенгламасига асосланиб унинг шаклини аниқлаймиз.

Эллипс тенгламаси устида олиб борилган муҳокамаларни такрорлаб гиперболанинг координаталар боши, координата ўқларига нисбатан симметриклиги аниқланади.

Гипербола Ox ўқи $A_1(a, 0)$ ва $A_2(-a, 0)$ нуқталарда кеседи. (25) тенглама билан аниқланган гипербола Oy ўқ билан кесишмайди. Ҳақиқатан (25) тенгламага $x = 0$ ни қўйсак, $-\frac{y^2}{b^2} = 1$. Равшанки, бу тенглик ҳақиқий сонлар соҳасида ўринли бўлмайди.

A_1 , A_2 нуқталар *гиперболанинг учлари* дейилади. Шундай қилиб, гиперболанинг иккита учи бор экан. Гиперболанинг учлари орасидаги масофа унинг *ҳақиқий ўқи* дейилади.

Ординаталар ўқида O дан b масофада турувчи $B_1(0, b)$ ва $B_2(0, -b)$ нуқталарни белгилаймиз. $B_1B_2 = 2b$ ни гиперболанинг *мавҳуи* y қи дейилади.

Агар $M(x, y)$ нуқта гиперболада ётса, унинг учун (25) тенгламадан: $|x| \geq a$. Демак, $x = \pm a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган $-a < x < a$ полосада гиперболанинг нуқталари йўқ.

(25) тенгламани y ординатага нисбатан ечамиз:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (34)$$

Бу тенгламадан куринадики, x миқдор a дан $+\infty$ гача ортганда ва $-a$ дан $-\infty$ гача камайганда y миқдор $-\infty < y < +\infty$ оралиқ

даги қийматларни қабул қилади. Демак, гипербола икки қисмдан иборат бўлиб, улар *гиперболанинг тармоқлари* дейилади.

Гиперболанинг бир (ўнг) тармоғи $x \geq a$ ярим текисликда, иккинчи (чап) тармоғи $x \leq -a$ ярим текисликда жойлашган.

Эслатма. Агар гиперболанинг фокуслари ординаталар ўқида жойлашган бўлса, унинг каноник тенгламаси $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ кўринишда бўлади.

3. Гипербола асимптоталари. Гиперболанинг шаклини яна ҳам аниқроқ тасаввур қилиш мақсадида текис (ясси) чизиқнинг¹ *асимптотаси* тушунчасини киритамиз.

Таъриф. Агар $M \in \Gamma$ нуқта шу Γ чизиқ бўйлаб ҳаракатланиб борганида унинг u тўғри чизиқкача бўлган масофаси нолга интилса, тўғри чизиқ Γ чизиқнинг *асимптотаси* дейилади.

Теорема. $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқлар $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг асимптоталаридир.

Исбот. Гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани учун гиперболанинг биринчи чоракдаги қисминигина олиш етарли. Шу мақсадда $x > a$ да гиперболанинг биринчи чоракдаги қисминини аниқлайдиган

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad (35)$$

тенглама билан

$$y = \frac{b}{a}x \quad (36)$$

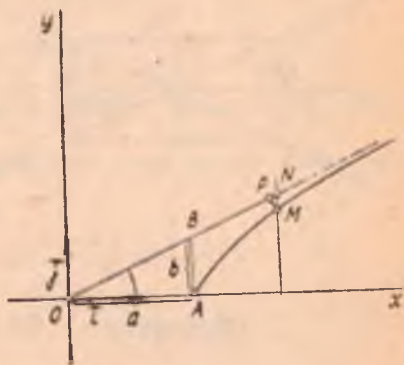
тенгламани солиштирамиз. $y = \frac{b}{a}x$ тўғри чизиқ координаталар

бошидан ўтади ва бурчак коэффициенти $k = \frac{b}{a}$. 136-чизмада

тўғри чизиқнинг биринчи чоракдаги бўлаги тасвирланган бўлиб, унда $OA = a$, $AB = b$. Гипербола ва $y = \frac{b}{a}x$ тўғри чизиқда мос

равишда жойлашган бир хил абсциссали $M(x, y)$, $N(x, Y)$ нуқталарни қараймиз. Бу икки нуқтанинг мос ординаталари:

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad Y = \frac{b}{a}x$$



136- чизма

¹ Барча нуқталари битта текисликда ётган чизиқ *текис (ясси) чизиқ* деб аталади.

булади. MN кесманинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$Y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \sqrt{x^2} > \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = y \Rightarrow Y > y$$

ёки $Y - y > 0$, демак, $\rho(M, N) = Y - y$. Лекин

$$Y - y = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

ёки

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Гиперболадаги M нуқтадан (36) тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асоси P бўлсин, у ҳолда

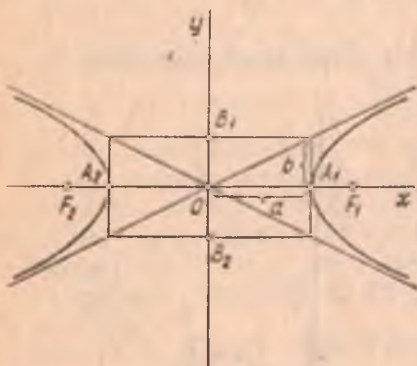
$$\rho(M, P) < \rho(M, N) \Rightarrow \rho(M, P) < \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ ифодани текширайлик. Унинг махражи чексиз ортиб боровчи икки мусбат қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлиб, сурати эса ўзгармас ab миқдордир, демак,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

У ҳолда

$$\rho(M, P) < \rho(M, N) \text{ дан } \rho(M, P) \rightarrow 0.$$



137- чизма

Демак, гиперболадаги M нуқта гипербола бўйича ҳаракатланиб, унинг учидан етарлича узоқлашса, M нуқтадан (36) тўғри чизиққача бўлган масофа нолга интилади. Юқоридagi таърифга кўра гиперболанинг қаралаётган қисми учун (36) тўғри чизиқ асимптота булади.

Гиперболанинг координат уқларига нисбатан симметриклигидан $y = -\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқ ҳам гиперболанинг асимптотасидир. Шундай қилиб,

$$x = \frac{b}{a}y, \quad y = -\frac{b}{a}x \quad (37)$$

тенгламалар билан аниқланадиган тўғри чизиқлар гиперболанинг асимптоталаридир (137- чизма).

Мисол. Асимптоталари $2x - y = 0$, $2x + y = 0$ тенгламалар билан берилган ва фокуслари марказдан 5 бирлик масофада бўлган гиперболанинг каноник тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган тенгламаларни $y = 2x$, $y = -2x$ кўринишда ёзиб олсак ҳамда (37) тенгламалар билан солиштирсак, $\frac{b}{a} = 2$ ёки $b = 2a$ бўлади. Фокуслар марказдан 5 бирлик масофада бўлгани учун $c = 5$ бўлиб, $b^2 = c^2 - a^2$ тенгликдан фойдалансак, $4a^2 = 25 - a^2$, бундан $a^2 = 5$, $a = \sqrt{5}$, у ҳолда $b = 2\sqrt{5}$. Шуларга асосан гиперболанинг изланаётган тенгламаси:

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

4. Тенг томонли гиперболо. Ярим ўқлари тенг бўлган гиперболо *тенг томонли* деб аталади.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ тенгламада } a = b \text{ бўлганда:}$$

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (38)$$

Тенг томонли гиперболо асимптоталарининг тенгламалари $y = x$, $y = -x$ кўринишда бўлиб, улар ўзаро перпендикуляр ($k_1 k_2 = -1$). Бу асимптоталарни янги координата ўқлари сифатида қабул қилсак, тенг томонли гиперболо тенгламаси ўрта мактаб курсида кўриладиган ихчам $xy = a$ кўринишни олади.

Ҳақиқатан, Ox ўқ учун $y = -x$ асимптотани, Oy ўқ учун эса $y = x$ асимптотани олсак, у ҳолда $\varphi = (\vec{i}, \vec{i}') = -45^\circ$.

Эски x , y координаталардан янги координаталарга ўтиш формулаларидан (II боб, 19-§):

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Энди x , y координаталардан x' , y' га ўтсак, тенг томонли гиперболанинг янги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x'y' = \frac{a^2}{2} \text{ ёки } y' = \frac{a^2}{2x'}.$$

Мисол. $xy = 2$ гиперболо тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Координаталар бошини қўзғатмаган ҳолда координата ўқларини $+45^\circ$ бурчакка бурамиз:

$$\begin{cases} x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y'), \\ y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y'). \end{cases}$$

x , y нинг бу қийматларини $xy = 2$ тенгламага қўямиз:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') = 2.$$

Соддалаштиргандан сўнг, ушбу каноник тенглама ҳосил бўлади:

$$x'^2 - y'^2 = 4.$$

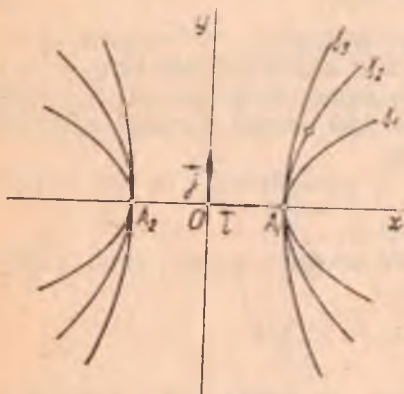
5. Эксцентриситет. Гиперболанинг фокуслари орасидаги масофани ҳақиқий ўқининг узунлигига нисбати гиперболанинг эксцентриситети дейилади.

Эксцентриситетни эллипсдагидек e ҳарфи билан белгиласак.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Гиперболада $c > a \Rightarrow e > 1$.

Эксцентриситет гипербола шаклини аниқлашда муҳим роль ўйнайди. Ҳақиқатан ҳам, $e = \frac{c}{a}$ дан $c = ea$, буни $b^2 = c^2 - a^2$ га қўйсак, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ ёки $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$ бўлиб, бундан кўринади-



138-чизма

ки, эксцентриситет e қанчалик кичик, яъни $e \rightarrow 1$ бўлса, $\frac{b}{a}$

шунчалик кичик, яъни $\frac{b}{a} \rightarrow 0$

бўлади (бу ерда a ўзгармайди деб фараз қилинади) ва гипербола ўзининг ҳақиқий ўқи-га сиқилган бўлади, аксинча, e катталашиб борса, $\frac{b}{a}$ ҳам

катталашиб, гипербола тармоқлари кенгайиб боради. 138-чизмада $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ гипербола-лар тасвирланган бўлиб, уларнинг e_1, e_2, e_3 эксцентриситетлари учун $e_1 < e_2 < e_3$.

Мисол. Тенг томонли гиперболанинг эксцентриситетини ҳисобланг.

Ечиш. Тенг томонли гиперболада $a = b$ бўлгани учун $b^2 = c^2 - a^2$ дан $c^2 = 2a^2$, бундан $c = \sqrt{2}a$. У ҳолда эксцентриситет:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}.$$

6. Гиперболанинг фокал радиуслари. (25) гиперболадаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтанинг фокал радиуслари $x > 0$ бўлганда (32) формулалар орқали ва $x < 0$ да (33) формулалар орқали ифодаланар эди. $\frac{c}{a} = e$ эканини эътиборга олсак, бу формулалар ушбу кўринишни олади:

$$x > 0 \text{ бўлганда } r_1 = ex - a, r_2 = ex + a, \quad (39)$$

$$x < 0 \text{ бўлганда } r_1 = a - ex, r_2 = -a - ex. \quad (40)$$

7. Гиперболани ясаш. Декарт репериди

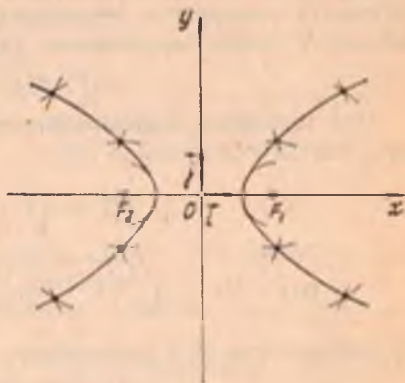
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенгламаси бўйича гиперболани ясаш масаласини қарайлик. Аввало бу тенглама бўйича унинг $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ учларини ва $c^2 = a^2 + b^2$ муносабатдан фойдаланиб $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ фокусларини топамиз. F_1 фокусни марказ қилиб, ихтиёрий r_1 радиусли $S(F_1, r_1)$ айлана, F_2 фокусни марказ қилиб, $r_2 = r_1 + 2a$ радиусли $S(F_2, r_2)$ айлана чизамиз. Бу икки айлананинг кесишган нуқталари гиперболада ётади, чунки бу нуқталар учун

$$|r_2 - r_1| = |r_1 + 2a - r_1| = 2a.$$

Марказларнинг уринлари алмаштирилса, гиперболанинг яна икки нуқтаси ҳосил бўлади. Шундай қилиб, r_1 нинг ҳар бир янги қиймати бўйича гиперболанинг тўртта нуқтасини ясаш мумкин.

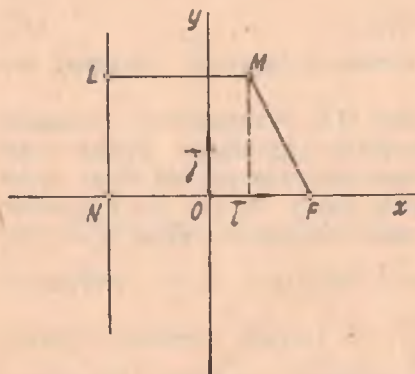
Шу усулда етарлича нуқталарни ясаб, уларни туташтирсак, гиперболанинг шакли 139-чизмадагидек тахмин қилинади.



139- чизма

50- §. Парабола

1. Таърифи. Каноник тенгламаси. Текисликда ҳар бир нуқтасидан берилган нуқтагача ва берилган тўғри чизиқгача бўлган масофалари ўзаро тенг бўлган барча нуқталар тўплами *парабола* деб аталади. Берилган нуқта берилган тўғри чизиқда ётмайди деб олинади. Берилган нуқта *параболанинг фокуси*, берилган тўғри чизиқ эса *параболанинг директрисаси* дейилади.



140- чизма

Параболанинг фокуси ва директрисасини мос равишда F ва d билан, фокусдан директрисагача бўлган масофани p билан белгиләймиз. Таърифдан фойдаланиб, парабола тенгламасини келтириб чиқарайлик: бунинг учун декарт реперини қуйидагича танлаймиз: абсциссалар ўқи деб F нуқтадан ўтувчи ва d тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни қабул қиламиз, унинг мусбат